Zusammenfassung zum Vortrag auf der GDM-Tagung in Klagenfurt am 26.02.2002

Lutz FÜHRER, Frankfurt am Main

Über einige Desiderate der Geometriedidaktik

1. An allgemeinen Schulen macht Geometrie heute einen sehr heterogenen Eindruck. In dieser Form ist sie schwer zu begründen. Von den traditionellen Globalzielen, nämlich Geometrie auszugeben als

- Lehre vom Anschauungsraum (incl. Umwelterschließung und materiale Anwendungen),
- Übungsfeld für Problemlösen (incl. Argumentieren, informelles Beweisen, Sprachschulung),
- mathematischen Strukturvorrat oder
- Musterbeispiel einer deduktiven Theorie (incl. Definieren und formales Beweisen),

werden die letzten beiden Ziele fast nur noch in Leistungskursen der Oberstufe explizit verfolgt. Aus einem ähnlichen Urteil hat Burscheid 1986 geschlossen, dass methodische Verbesserungsvorschläge fehlgingen, wo sie sich auf diese abstraktionsmäßig „höheren" Ziele richteten oder stützten. Als Chance empfahl Burscheid damals curriculare Orientierung an van Hieles Theorie des gestuften Abstraktionserwerbs.

Leider ist diese Theorie nur in ihrer Phasenmethodik konstruktiv, während van Hieles „Denkebenen" kaum über Altbekanntes hinaus führen – man denke etwa an Comenius, Fröbel, Meumann oder Stückrath. Burscheids Forderung, das gesamte Geometriecurriculum weniger systemorientiert, als vom Schüler her zu überdenken, blieb uneingelöst.

2. Es gibt eine Reihe unterrichtsmethodischer Standardprobleme, die den Geometrieunterricht besonders erschweren und mit seinen Begründungsschwächen zusammen zu hängen scheinen:

- kompensatorischer Aktionismus zur Erholung vom Rechnen bzw. – auf den höheren Schulstufen – Verdrängung des Synthetischen durch analytisches Rechnen (Stereometrie, Integralrechnung; Vektorgemetrie)
- Materialisierungs- und Trivialisierungstendenz durch Schülerzentrierung (Differenzierungs-, Sprach-, Disziplin- und Logistikprobleme)
- fehlende Operationalisierung formaler Ziele (z.B. fragwürdige „Förderung der visumotorischen Koordination" für Normalentwickelte)
- viele Lehrer/innen stehen nicht genug „über dem Stoff", um *durch* ihn

zu unterrichten, statt ihn als (belangloses) Vermittlungsziel zu nehmen.

Auch unterrichtsmethodische Probleme verlangen nach einem informelleren Aufbau der Geometrieinhalte, um deren Substanz nicht mit positivem Bezeichnungs-, Satz- und Beweiswissen verwechseln zu lehren.

3. Wörtlich genommen ist Geometrie als „Lehre vom Anschauungsraum" ein sehr anspruchsvolles, vielleicht zu anspruchsvolles Ziel für allgemeine Schulen. Es handelt sich – in heutiger Auffassung – um einen vergleichsweise späten didaktischen Wunsch, der aus ursprünglich recht getrennten Quellen in der Zeit der „Ersten Reformpädagogik" aufkam:

- gegen den tradierten, rein messkundlichen Kern an Volksschulen (wenn überhaupt) und
- gegen die philosophiepropädeutisch motivierte Einweisung in die Anfänge von Euklids Elementen („Elementarmathematik");
- für selbsttätiges, kingemäßes, „natürliches" Lernen (Rousseau, Basedow, Trapp),
- für Geometrie als Schule der (auf der Retina zweidimensionalen) Anschauungsverhältnisse (Pestalozzi, Herbart, Diesterweg) und
- für Geometrie als integralen Teil einer „echten" Raumkunde (Friesen, Weiß, von Raumer, Harnisch, Fröbel).

Die letztgenannte Bewegung hielt die Mineralogie für die künftige Leitwissenschaft aller Naturkunde und unterstellte der „Raumlehre" eine neue Bedeutung als dreidimensionales Eingangstor zu jeglicher Naturerkenntnis. Dieser Auffassung folgte die Volksschulpädagogik halbherzig, die Gymnasialpädagogik – trotz diverser Reanimationen des „Fusionsgedankens" – gar nicht.

Im heutigen Geometrieunterricht spielt der Anschauungsraum als Gegenstand allenfalls in der vektoriellen Lineargeometrie der Oberstufe eine Rolle. Die dafür grundlegende formalistische, aktual-unendliche Auffassung stellt einen Bruch gegenüber der synthetischen, potentiell-unendlichen der Mittelstufe dar (Struve1990), der nicht aufgearbeitet, sondern durch gezielt einseitiges Aufgabenmaterial hierarchisch verdrängt wird. Einschlägige Erkenntnisse und Theorien des 20. Jhs., die den Anschauungsraum – wie etwa Relativitätstheorie, Protogeometrie oder Neuropsychologie der Wahrnehmungsräume – als Realität ernst nehmen, spielen folgerichtig keine Rolle.

Das Argument, mit dem Geometrieunterricht Umwelterschließung, Raumanschauungs- und -vorstellungsvermögen sowie naturwissenschaftliche Studierfähigkeit fördern zu wollen, überzeugt Schüler entsprechend wenig. Was in dieser Hinsicht fehlt , ist nicht eine modernisierte Begründung, Sequenzierung und/oder Methodik der Schulgeometrie, sondern eine neue Schulgeometrie, wie sie schon Timerding 1912 angemahnt hat:

„Was der Fortentwicklung der durch die Pestalozzische Anschauungslehre gegebenen Anregungen vornehmlich hindauernd im Wege gestanden hat, war eben der irrige Glaube, dass auf diesem Wege nur eine geometrische Propädeutik gewonnen werden könne. Dass hier der Ansatz zu einer neuen Ausgestaltung des ganzen geometrischen Unterrichts vorlag, erkannte man nicht.“ (Timerding, S. 31)

4. Geometrieunterricht ist bei vielen Gelegenheiten auch, dies dann aber in besonderem Maße Sprachunterricht (Bezeichnungswust in der Orientierungsstufe, Konstruktionsaufgaben, Begründungen in der Stereometrie, Lineare Algebra). Insofern betrifft ihn jedes Schisma zwischen Alltags- und mathematischer Fachsprache besonders. Gallin/Ruf haben dem Mathematikunterricht ein solches Schisma bescheinigt und es aufgrund lernpsychologischer Überlegungen durch textproduktive Übergänge von subjektiv „singulärem“ zu objektivistisch „regulärem“ Wissen zu heilen versucht. Maier/Schweiger kommen zu einer ähnlichen Anamnese, setzen jedoch weniger revolutionär auf verstärkte Übungen zum intermodalen Transfer. In beiden Fällen wird aus verständlichen Gründen am Fachinhaltlichen nicht gerüttelt.

Verläßt man jedoch die Zugangs-Vermittlungs-Perspektive, dann wird die Sprachpraxis des Mathematikunterrichts auch inhaltlich fragwürdig: Wo Beweise in den schulischen Blick kommen – und das ist zuerst und bis zur 10. Klasse fast nur in der Geometrie –, da werden mathematische Begriffe in aristotelische Realdefinitionen gezwängt, um dann umso überzeugender „Deduktion“ mithilfe einer banalen Eigenschafts-Teilmengen-Logik abspulen zu können. Mathematische Begriffe werden dann suggestiv ihren Realdefinitionen gleich gesetzt, und das wird als Charakteristikum „der“ mathematischen Fachsprache ausgegeben.

Jede ernsthafte Analyse der Begriffsfunktionen beim Mathematiktreiben zeigt, dass der aristotelische Begriffsbegriff keine brauchbare Sprache erlaubt, weil er logisch-analytische Interessen zu weit über intuitiv-synthetische stellt. Die wichtigen mathematischen Begriffe sind nämlich solche, die Aristoteles „bezogen“ nannte, d. h. Relativbegriffe, für die es „unmöglich ist, den einen Begriff ohne den anderen zu erkennen“ (Aristoteles, S. 61). Produktiv-geometrisches Arbeiten in der Schule braucht relationale

Fachbegriffe und -ausdrucksformen, die ohne implizite Definitorik auskommen. (vgl. etwa Borneleit u. a. 2001, S. 28).

5. Die bekannte Diskrepanz zwischen kinematischem und mathematischem Bewegungsbegriff ist nicht nur eine Frage der Sprachkonventionen, es ist auch eine der Denkgewohnheiten. Nach Maier/Schweiger pflegt die im 20. Jh. favorisierte mathematische Fachsprache einen Verlautbarungsstil, der sich auch im Vergleich zu anderen Fachsprachen besonders zeitlos, objektivistisch, substantivistisch und redundanzarm-esoterisch gibt. Wie Wagenschein oft beklagte, entspricht dieser Sprachstil einer lernfeindlichen Abstinenz von genetischen und prozessualen Darstellungen.

In seiner platonistischen Mathematikauffassung wagte es Wagenschein nicht, andere fachwissenschaftliche Auffassungen oder gar Inhalte zu fordern. Inzwischen zeigen sich jedoch in der Fachwissenschaft selbst starke Tendenzen zu anwendungsorientiert „robusten" Mathematikauffassungen, die einerseits nach stärker prozessualen Ausdrucks- und Denkweisen verlangen (Variablenbegriffe, dynamische und stochastische Prozesse, Animation, Morphing, Zugmodus), andererseits die extrapolativen Übergänge von diskreten zu analogen Strukturen konstruktiver und näher zur intuitiven Alltagssprache beschreiben müssen (Verstetigung von großen Graphen, Bäumen bzw. „Bewegungscollagen"). Die Schulgeometrie sollte die dynamischeren Möglichkeiten der Alltagssprache auch begrifflich nutzen. (Vgl. dazu die 3. Reform-These in Borneleit u.a., S. 28.)

Literatur

Aristoteles: Elemente der aristotelischen Logik – Übers. u. Komm. von A. Trendelenburg, hrsg. von R. Beer. Reinbeck: Rowohlt1967.

Borneleit, P./Danckwerts, R./Henn, H.-W./Weigand, H.-G.: Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: Tenorth, H.-E.: Kerncurr. Oberstufe. Weinheim: Beltz 2001, S. 26-53.

Burscheid, H. J.: Braucht der Geometrieunterricht Anregungen? In: MU 1986.4, S. 5-21.

Gallin, P./Ruf, U.: Sprache und Mathematik in der Schule – Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. Seelze: Kallmeyer 1998.

Maier, H./Schweiger, F.: Mathematik und Sprache. Wien: öbv & hpt 1999.

Struve, H.: Grundlagen einer Geometriedidaktik. Mannheim: BI 1990.

Timerding, H. E.: Die Erziehung der Anschauung. Leipzig/Berlin: Teubner 1912.